# 複合フェルミオンのペアリング状態と対破壊効果(基研研究会「量子ホール効果及び関連する物理」,研究会報告)



森成, 隆夫

# 複合フェルミオンのペアリング状態と対破壊効果

東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻　森成 隆夫 [1]

Landau 準位の充填率が偶数分母である量子ホール系の複合フェルミオンのペアリング状態における, Chern-Simons ゲージ場のゆらぎによる対破壊効果について議論する. Rajaraman-Sondhi 変換を用いた定式化では, 変換が非ユニタリー変換であるため, 非エルミート項がハミルトニアンに存在するが, この項は複素ベクトルポテンシャルとみなすことができ, 対破壊効果をもつと考えられる. この対破壊効果が, ペアリング状態では irrelevant であることを示す.

## 1 はじめに

最近, 偶数分母の量子ホール系において複合フェルミオンのペアリングの可能性が指摘されている [1, 2, 3, 4]. 特に $\nu = 5/2$ においては, 従来 d- 波のスピン一重項であると考えられていたが [5], スピン偏極した p- 波のペアリング状態という方向に収束しつつある [1, 2, 4]. また $\nu = 1/2$ においても p- 波のペアリングの可能性が議論されている [3].

一方, Chern-Simons ゲージ場のゆらぎによる対破壊効果が Bonesteel によって指摘されている [6]. また Rajaraman と Sohdhi によって導入された非ユニタリー変換 [7] を用いた複合フェルミオンのペアリング理論 [3] においては, 非エルミート項の効果が不明瞭であった.

以下では, この非エルミート項が対破壊効果を持つことを指摘し, 複合フェルミオンのペアリング状態においてはこの効果が irrelevant であることを示す.

## 2 Rajaraman-Sondhi 変換

磁場中の二次元電子系で Landau 準位の充填率が $\nu = 1/m$ ($m$ は偶数) の場合を考え, 次式で与えられる Rajaraman-Sondhi 変換 [7] を用いて電子系を複合粒子の系へ変換する：

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{r}) = e^{-J(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}), \\ \pi(\mathbf{r}) = \psi^{\dagger}(\mathbf{r})e^{J(\mathbf{r})}, \end{cases} \tag{1}$$

ここで

$$\begin{aligned} J(\mathbf{r}) &= m\int d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\log(z-z') - \frac{1}{4{\ell_B}^2}|z|^2 \\ &= i\,m\int d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\mathrm{Im}\log(z-z') \\ &\quad +m\int d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\mathrm{Re}\log(z-z') - \frac{1}{4{\ell_B}^2}|z|^2, \end{aligned} \tag{2}$$

[1] E-mail:morinari@appi.t.u-tokyo.ac.jp

であり, $z = x + iy$, $\ell_B = \sqrt{c\hbar/eB}$ は磁気長, $m$ は磁束量子を単位とした複合フェルミオンの擬フラックス数である. $\phi(\mathbf{r})$ および $\pi(\mathbf{r})$ は複合フェルミオンの場の演算子である. 変換 (1) はユニタリー変換でないため, $\pi(\mathbf{r}) \neq \phi^\dagger(\mathbf{r})$ である. また $\pi(\mathbf{r})$ と $\phi(\mathbf{r})$ はフェルミオンの反交換関係を満たす. 式 (2) の二行目で虚数部分のみだと通常の Chern-Simons ゲージ場理論における変換になる [8].

式 (1) によって電子系のハミルトニアンは次式の複合フェルミオンのハミルトニアンに変換される：

$$\begin{aligned} H &= \int d^2\mathbf{r}\, \pi(\mathbf{r}) \frac{1}{2m_b} \left(-i\nabla + \delta\mathbf{a} + i\hat{z}\times\delta\mathbf{a}\right)^2 \phi(\mathbf{r}) + V_C \\ &= \int d^2\mathbf{r}\, \pi(\mathbf{r}) \left(-\frac{1}{2m_b}\nabla^2\right) \phi(\mathbf{r}) + V_H + V_{NH} + V_C, \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $m_b$ は電子のバンド質量, $\delta\mathbf{a}$ は Chern-Simons ゲージ場の平均場からのゆらぎであり次式で与えられる：

$$\delta\mathbf{a} = \frac{\phi_0}{2\pi} \cdot m \int d^2\mathbf{r}'\, \delta\rho(\mathbf{r}') \nabla \mathrm{Im} \log(z - z') \qquad (\delta\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) - \bar{\rho}). \tag{4}$$

また $V_C$ はクーロン相互作用, $V_H$ および $V_{NH}$ はそれぞれエルミート項, 非エルミート項であり,

$$V_H = \int d^2\mathbf{r}\, \delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}_{CF}, \tag{5}$$

$$V_{NH} = \int d^2\mathbf{r}\, i\, \delta\mathbf{a} \times \mathbf{j}_{CF}, \tag{6}$$

である. 式 (4) を式 (5), 式 (6) に代入することにより, 複合フェルミオン間の二体相互作用が得られる. 古典的な運動方程式を考えると, $V_H$ の項は Chern-Simons ゲージ場による Lorentz 力を生じさせることがわかる. これが複合フェルミオン間の引力相互作用の起源となる.

## 3 複合フェルミオンのペアリング状態

まず $V_{NH}$ および クーロン相互作用 $V_C$ を無視した場合を考える [9]. 複合フェルミオンの $\ell$-波のペアリング状態のギャップを $\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_k e^{-i\ell\theta_{\mathbf{k}}}$ と仮定するとギャップ方程式は,

$$\Delta_k = \frac{m}{2M} \int_0^k dk' \frac{k'\Delta_{k'}}{E_{k'}} \left(\frac{k'}{k}\right)^\ell + \frac{m}{2M} \int_k^\infty dk' \frac{k'\Delta_{k'}}{E_{k'}} \left(\frac{k}{k'}\right)^\ell, \tag{7}$$

となる. ここで $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \overline{\Delta}_k \Delta_k}$ は準粒子励起のエネルギーである. また質量のくりこみの効果を取り入れるため有効質量 $M$ を導入した. 式 (7) の右辺の $k \to 0$ および $k \to \infty$ の漸近形からギャップ関数 $\Delta_k$ の形を次式で仮定する：

$$\Delta_k = \begin{cases} \epsilon_F \Delta \left(k/k_F\right)^\ell & \text{for} \quad k < k_F, \\ \\ \epsilon_F \Delta \left(k_F/k\right)^\ell & \text{for} \quad k > k_F. \end{cases} \tag{8}$$

パラメータ $\Delta$ は, $k = k_F$ におけるギャップ方程式：

$$\int_0^1 dx \frac{x^{2\ell+1}}{\sqrt{(x^2-1)^2 + \Delta^2 x^{2\ell}}} + \int_1^\infty dx \frac{x^{1-2\ell}}{\sqrt{(x^2-1)^2 + \Delta^2 x^{-2\ell}}} = \frac{1}{m}, \tag{9}$$

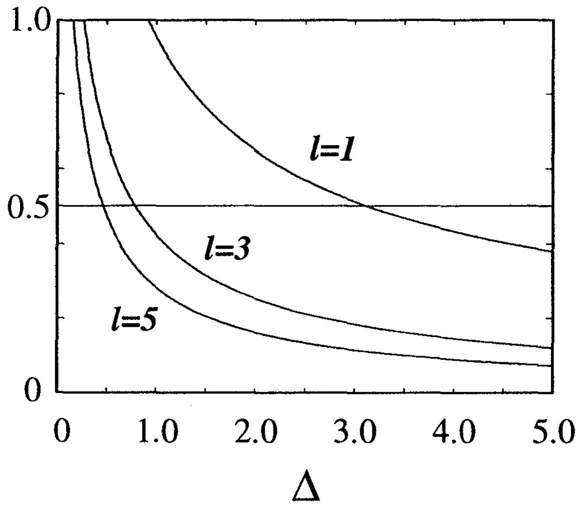


図 1: 様々なペアリング状態に対するギャップ方程式 (9) の右辺のプロット. $\nu = 1/2$ の場合, 解は $1/m = 1/2$ との交点から求められる. $\ell = 1$ のペアリング状態が最大のギャップをもつ.

を考えることにより数値的に解くことができる. 図 1は式 (9) の右辺を $\Delta$ についてプロットしたものである. 図からわかるように, $\ell = 1$ のペアリング状態が最もギャップが大きい. 一方, 基底状態エネルギーの解析から最大の $\Delta$ をもつ状態が最もエネルギーが低く, また非ペアリング状態よりもエネルギーが低い. よって, 基底状態は p- 波のペアリング状態である.

## 4 非エルミート項の効果

非エルミート項 $V_{NH}$ は式 (3) の導出から明らかなように複素ベクトルポテンシャルと見なすことができる. 一方, 超伝導体における磁束の局在ー非局在転移の問題において, 複素ベクトルポテンシャルが非局在性を引き起こすことが指摘されている [10]. この問題における局在状態が複合フェルミオンのペアリング状態であるとみなすと非局在状態は非ペアリング状態に対応するので,$V_{NH}$ は対破壊効果をもつと考えられる. $V_{NH}$ を考慮したギャップ方程式は次式で与えられる：

$$\Delta_k = \frac{\phi}{M}\int_0^k dk' \frac{k'\Delta_{k'}}{E_{k'}}\left(\frac{k'}{k}\right)^\ell, \quad \overline{\Delta}_k = \frac{\phi}{M}\int_k^\infty dk' \frac{k'\overline{\Delta}_{k'}}{E_{k'}}\left(\frac{k}{k'}\right)^\ell. \tag{10}$$

非エルミート項 $V_{NH}$ のため, $\overline{\Delta}_{\mathbf{k}}$ は $\Delta_{\mathbf{k}}$ の複素共役ではない. そのため上のように二つの方程式が必要になる. 積分方程式 (10) は厳密に解くことができて, その解は

$$\Delta_k = \begin{cases} 0 & (k < k_F), \\ \Delta((k/k_F)^2 - 1)^m/(k/k_F)^\ell & (k > k_F), \end{cases} \tag{11}$$

$$\overline{\Delta}_k = \begin{cases} \overline{\Delta}(k/k_F)^\ell(1-(k/k_F)^2)^m & (k < k_F), \\ 0 & (k > k_F), \end{cases} \tag{12}$$

である. この状態は $\overline{\Delta}_k\Delta_k \equiv 0$ であることからギャップレスのペアリング状態である. ところが, 基底状態エネルギーの解析から $\overline{\Delta}_k\Delta_k \equiv 0$ の状態はエネルギーの極大点にあることが示され

る．一方, $V_{NH}$ は通常の Chern-Simons ゲージ場理論における三体相互作用項 $V_3$ に対応しているが, $\nu = 1/m$ ($m$ は奇数) の量子ホール状態では $V_3$ が irrelevant であることが示されている [11]. よって, Bonesteel が指摘するように Chern-Simons ゲージ場のゆらぎによる対破壊効果が存在するが, 複合フェルミオンのペアリング状態では irrelevant であると考えられる.

## 5 結論

Rajaraman-Sondhi 変換による複合フェルミオンのペアリング理論では非エルミート項が存在し, この項は対破壊効果をもつ．しかしながら, ギャップ方程式および基底状態エネルギーの解析からペアリング状態については irrelevant であると考えられる．非エルミート項は, 二電子間のクーロン相互作用と外部磁場によって引き起こされる量子ホール系においてもっとも基本的な短距離の二体相関効果を, 非ユニタリー変換を用いて取り入れたことに起因している．しかしながら, 非エルミート項は長距離の振舞いには影響しないと考えられる．一般的にこのようなことが成り立つとすれば, 強相関電子系を議論するにあたり, まず短距離相関を完全に取り入れた変換を行い, 低エネルギーの解析では非エルミート項の効果を無視してよいことになる．この点についてはより詳細な考察が必要であるが, 強相関電子系を理解するうえでのひとつの指針となると考えられる.

## 参考文献


[1] R. H. Morf, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 1505 .

[2] E. H. Rezayi, and F. D. M. Haldane, Bull. Am. Phys. Soc. **43** (1998), 655.

[3] T. Morinari, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 3741.

[4] K. Park, V. Melik-Alaverdian, N. E. Bonesteel, and J. K. Jain, Phys. Rev. B **58** (1998), R10167.

[5] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 956.

[6] N. E. Bonesteel, preprint, cond-mat/9807146.

[7] R. Rajaraman, and S. L. Sondhi, Int. J. Mod. Phys. B **10**, 793 (1996).

[8] S. C. Zhang, Int. J. Mod. Phys. B **6**, 25 (1992).

[9] M. Greiter, X. G. Wen and F. Wilczek, Nucl. Phys. B **374**, 567 (1992).

[10] N. Hatano, and D. R. Nelson, Phys. Rev. Lett. **77**, 570 (1996); Phys. Rev. B **56**, 8651 (1997).

[11] C. L. Kane, S. Kivelson, D. H. Lee, and S. C. Zhang, Phys. Rev. B, **43**, 3255 (1991).